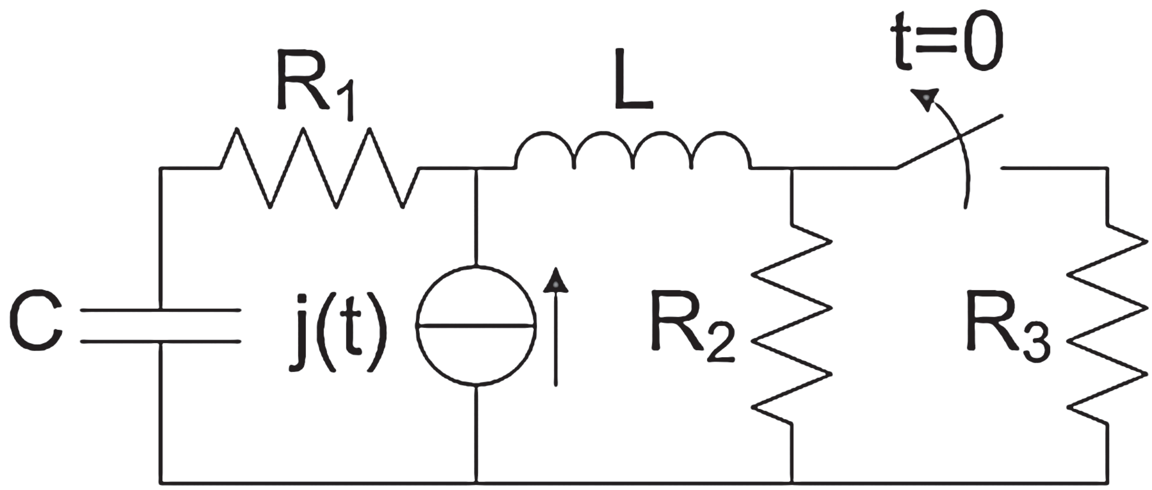
ESERCIZIO SU CIRCUITO IN EVOLUZIONE DINAMICA (3)

dario.assante

#1 Inviato : lunedì 16 marzo 2015 15:50:18

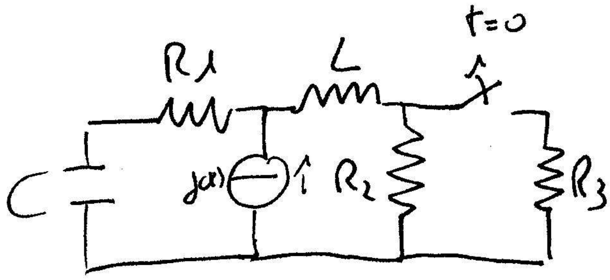
Si consideri la rete in figura. L'interruttore si apre per t = 0. Determinare la corrente che attraversa l'induttore in ogni istante, avendo a disposizione i seguenti dati:

j(t) = 10 cos(1000t+pi/4) A, L = 1 mH, C = 1 mF, R1 = 0.5 Ohm, R2 = 2 Ohm, R3 = 2 Ohm.



Attenzione. Si tratta di un esercizio non semplice!

PROVA 16.03.2015 EVOLUZIONE DINAMICA (3)



$j(t) = 10 \cos(1000t + \frac{\pi}{4})$ A

$L = 1$ mH $= 10^{-3}$ H

$C = 1$ mF $= 10^{-3}$ F

$R_1 = 0.5\ \Omega$

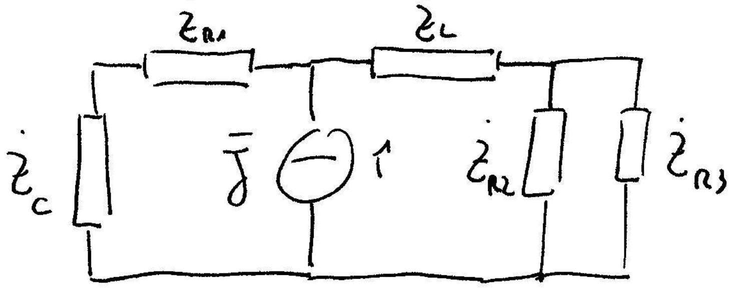
$R_2 = 2\ \Omega$

$R_3 = 2\ \Omega$

Determinare i_L per ogni istante di tempo

REGIME SINUSOIDALE => PASSAGGIO AI FASORI

$t<0$: l'interruttore è chiuso



$$\bar{J} = 10\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L = j \cdot \frac{1}{1000} \cdot 1000 = j$$

$$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1000 \cdot \frac{1}{1000}} = -j$$

$$\dot{Z}_{R1} = \frac{1}{2}$$

$$\dot{Z}_{R2} = 2$$

$$\dot{Z}_{R3} = 2$$

IMPEDENZA EQUIVALENTE DEL CIRCUITO :

$$\dot{Z}_{eq} = (\dot{Z}_{R2} \,//\, \dot{Z}_{R3}) + \dot{Z}_L + \dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_C = \frac{3}{2}$$

quindi

$$\bar{V}_J = \frac{3}{2}\bar{J} \Rightarrow \bar{V}_J = 15\, e^{j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow v_C(t) = 15\cos(1000t + \frac{\pi}{4})$$

in quanto il condensatore e il generatore sono in parallelo,

quindi $v_C(0^-) = 15 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{15}{2}\sqrt{2}$

LA CORRENTE NELL'INDUTTORE È UNA RIPARTIZIONE NELLA SERIE R_1 e C e NELL'INDUTTORE

$$\bar{I}_L = \bar{J} \cdot \frac{\dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_C}{\dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_C + \dot{Z}_L + \dot{Z}_{R2} // \dot{Z}_{R3}} = \ldots = \frac{10}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} - \frac{20}{3} j e^{j\frac{\pi}{4}}$$

QUINDI:

$$i_L(t) = \frac{10}{3} \cos\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{20}{3} \operatorname{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Da cui

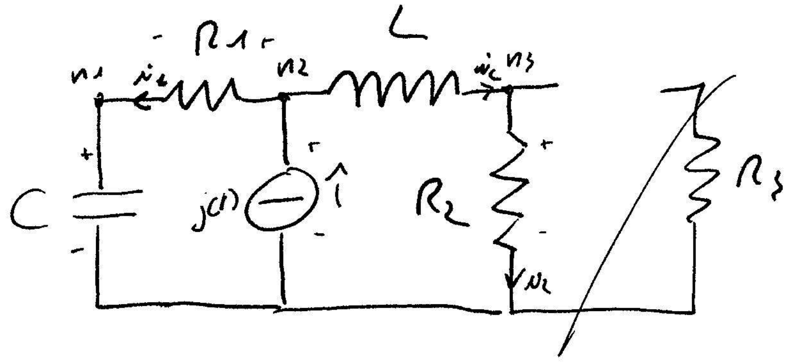
$$i_L(0^-) = \ldots = -\frac{5}{3}\sqrt{2}$$

PER LA CONTINUITÀ DELLE VARIABILI DI STATO ABBIAMO

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = -\frac{5}{3}\sqrt{2} \quad A$$

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = \frac{15}{2}\sqrt{2} \quad V$$

- DETERMINAZIONE DELLA EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE REGOLA IL COMPORTAMENTO DELLA VARIABILE DI INTERESSE (i_L) DOPO L'ISTANTE DI COMMUTAZIONE.



LKC nodo n3 : $i_L - i_2 = 0$

LKC nodo n2 : $j - i_1 - i_L = 0$

LKC nodo n1 : $i_1 - i_C = 0$

LKT maglia dx : $v_j - v_L - v_2 = 0$

caratteristiche dei bipoli dinamici:

$$v_L = L \frac{d i_L}{dt}$$

$$i_C = C \frac{d v_C}{dt}$$

LKT maglia sx : $v_1 + v_C - v_j = 0$

Abbiamo:

$v_C = v_j - v_1 = v_j - R_1 i_1$ (dalla LKT maglia sx)

$v_j = v_L + v_2$ (dalle LKT maglia dx), quindi, sostituendo v_j nelle eq. sopra abbiamo:

$$v_C = v_L + v_2 - R_1 i_1$$

$$v_C = L \frac{d i_L}{dt} + R_2 i_2 - R_1 i_1$$

$i_2 = i_L$ dalla LKC nodo n3;

~~combinando le LKC al nodo n1 e n2 abbiamo~~

~~$i_C = i_1$ e~~ $i_1 = j - i_L$

quindi

$$v_C = L \frac{d i_L}{dt} + R_2 i_L - R_1 (j - i_L)$$

Poi, considerando la LKC nodo n1:

$$i_1 - i_C = 0,$$

con

$$i_1 = j - i_L$$

e con

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

quindi

$$j - i_L - C\frac{dv_C}{dt} = 0, \text{ ovvero}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & i_L + C\frac{dv_C}{dt} = j \\ & v_C = L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L + R_1 i_L - R_1 j \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$i_L + C\left[L\frac{d^2 i_L}{dt} + R_2\frac{di_L}{dt} + R_1\frac{di_L}{dt} - R_1\frac{dj(t)}{dt}\right] = j$$

da cui

$$\frac{i_L}{C} + L\frac{d^2 i_L}{dt} + (R_1+R_2)\frac{di_L}{dt} - R_1\frac{dj(t)}{dt} = \frac{j}{C}$$

ovvero

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt} + \frac{R_1+R_2}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{R_1}{L}\frac{dj(t)}{dt} + \frac{j(t)}{LC}}$$

4) Omogenea associata

$$\lambda^2 + \frac{R_1+R_2}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{5}{2}\cdot 1000\,\lambda + 10^6 = 0$$

$$\lambda^2 + 2500\,\lambda + 10^6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2500 \pm \sqrt{2500^2 - 4\cdot 10^6}}{2} =$$

$$= \frac{-2500 \pm \sqrt{2250000}}{2} = \frac{-2500 \pm 1500}{2}$$

$$\lambda_1 = -2000$$

$$\lambda_2 = -500$$

Quindi $i_{L0}(t) = K_1 e^{-2000t} + K_2 e^{-500t}$

5) Integrale particolare.

Metodo matematico. Poniamo i

$i_{LP}(t) = A\cos(1000t + \frac{\pi}{4}) + B\,\mathrm{sen}(1000t + \frac{\pi}{4})$

Abbiamo, tralasciando la riscrittura dei calcoli*:

$$A = 0 \quad e \quad B = 3{,}33$$

$$* \; -1000^2 A\cos(\ldots) - 1000\,B\,\mathrm{sen}(\ldots) - 1000\cdot 1500\,A\,\mathrm{sen}(\ldots) + 1000\cdot 1500\,B\cos(\ldots) +$$
$$+ 1000\cdot 1000\,A\cos(\ldots) + 1000\cdot 1000\,B\,\mathrm{sen}(\ldots) = -1000\cdot 5000\cos(\ldots) + 10\cdot 1000\cdot 1000\cos(\ldots)$$

Dunque $i_{LP} = 3{,}33 \text{ sen}(1000t + \frac{\pi}{4})$

6) Seconda condizione iniziale:

$$\frac{d i_L(0^+)}{dt} = ?$$

Considerando $v_C + v_L = v_g$

e, tenendo conto che il generatore, il condensatore e R_2 sono in parallelo, abbiamo

$$v_L = v_g - v_C$$

Quindi

$$\frac{d i_L(0^+)}{dt} = \frac{\overset{= 10\cos\frac{\pi}{4}}{v_g(0^+)} - \overset{= 30\cos\frac{\pi}{4}}{v_C(0^+)}}{L} =$$

$$= -20\cos\frac{\pi}{4} \cdot 1000 = -13345 \text{ A}$$

Dunque $\frac{d i_L}{dt}(0^+) = -13345$ A

7) Soluzione finale e applicazione condizioni iniziali:

$i_L(t) = i_{L0}(t) + i_{LP}(t)$

$$\begin{cases} i_L(t) = K_1 e^{-2000t} + K_2 e^{-500t} \\ i_L(0^-) = -\frac{5}{3}\sqrt{2} \\ \frac{d i_L(0^+)}{dt} = -13345 \end{cases}$$

A conti fatti

$K_1 = -9{,}58$

$K_2 = 7{,}22$

Quindi abbiamo, in conclusione

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{10}{3}\cos\left(1000t+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{10}{3}\sin\left(1000t+\frac{\pi}{4}\right), & t<0 \\ -9{,}58\, e^{-2000t} + 7{,}22\, e^{-500t}, & t\geq 0 \end{cases}$$